高斯—牛顿法在滑坡预测预报模型参数优化中的应用

李秀珍[1,2]，孔纪名[2]，王成华[2]

(1. 西南交通大学 土木工程学院，四川 成都 610031；2. 中国科学院 水利部 成都山地灾害与环境研究所，四川 成都 610041)

摘　要：对滑坡预测预报的非线性模型，在估计其参数时，传统的方法是将非线性模型在参数的近似值处展开成泰勒级数，并仅取至一次项，然后再应用线性模型参数估计理论进行参数估计。因线性化时略去了二阶及二阶以上的各高次项，所以必然会产生模型误差。介绍了高斯—牛顿法的基本原理，并以洒勒山新滑坡为例，在建立该滑坡灰色 GM(1, 1) 模型和 Verhulst 模型的基础上，运用高斯—牛顿法对两个非线性模型的参数进行优化。计算结果表明，参数优化后各模型的预测精度比优化前各模型的精度有显著提高。说明采用高斯—牛顿法优化非线性模型参数是提高滑坡预测预报精度的一种有效且切实可行的方法。

关键词：高斯—牛顿法；参数优化；滑坡预测预报；Verhulst 模型；灰色 GM(1, 1) 模型

文献标识码：A　　文章编号：1000—288X(2008)05—0132—04　　中图分类号：P642.22

Gauss—Newton Method and Its Application in Parameter Optimization of Landslide Prediction Models

LI Xiu-zhen[1,2], KONG Ji-ming[2], WANG Cheng-hua[2]

(*1. College of Civil Engineering, Southwestern Jiaotong University, Chengdu, Sichuan* 610031, *China;*
2. Chengdu Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences, Chengdu, Sihuan 610041, *China)*

Abstract: In estimating parameters of non-linear models for landslide prediction, the traditional method is to develop into Taylor series at the parameter approximate value and only obtain one item, and then handle by linear model. Because of ignoring the items of two steps and above two steps in linearization, model errorwiu occur inevitably. By introducing Gauss—Newton method and taking Saleshan landslide for an example, Gauss—Newton method is used to optimize parameters of the two non-linear models on the basis of establishing grey GM(1, 1) model and Verhulst model of the landslide. Results indicate that the prediction precision of the two models after optimizing parameters is obviously higher than that of the models before optimizing parameters. So, it is an effective and feasible method for improving landslide prediction precision to use Gauss—Newton method to optimize parameters of non-linear models.

Keywords: Gauss—Newton method; parameter optimization; landslide Prediction; Verhulst model; grey GM (1, 1) model

由于滑坡的不确定性、随机性和复杂性，一般建立的预测预报模型往往是非线性的。在估计非线性模型的参数时，传统的方法是将其线性化，即将非线性模型在参数的近似值处展开成泰勒级数，并仅取至一次项，然后再应用线性模型参数估计理论进行参数估计[1]。将非线性模型线性化，因略去了二阶及二阶以上的各高次项，所以必然会产生模型误差。显然，优化非线性模型参数是提高建模精度的关键。对于非线性模型，要想求出参数的解析解几乎是不可能的[2]。实际上非线性模型的参数求解问题是一个优化问题，求解优化问题的算法有直接搜索法、梯度法、高斯—牛顿法、变尺度法和单纯形法等等[3]。本文采用高斯—牛顿法来优化模型参数，以提高非线性模型的预测精度。

1　高斯—牛顿法

高斯—牛顿法[4—7]的基本出发点就是先对非线性模型进行线性近似，求出近似模型的最小二乘估计，然后再进行迭代计算。

为推导出此法的普通计算公式，将含有 t 个回归因子和 m 个待定参数 b 的非线性模型写成下式

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_t, b_1, b_2, \cdots, b_m) = f(X, \beta) \quad (1)$$

上式中的回归因子 x_i 是已知的，可以通过测量获得，关键是要通过一系列的观测值(样本)来估计待

收稿日期：2007-08-03　　修回日期：2008-05-28
资助项目：国家自然科学基金资助项目(50639070)；成都山地所青年种子基金资助项目(1100001071)
作者简介：李秀珍(1975—)，女(汉族)，内蒙古自治区马盟卓资县人，助理研究员，博士研究生，主要从事滑坡预测预报研究。E-mail: xzljt@sina.com。
通信作者：孔纪名(1956—)，男(汉族)，重庆市人，研究员，主要从事斜坡变形破坏规律研究。E-mail: jimingk@imde.ac.cn。

定参数 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$。在此我们把按常规计算的非线性模型参数 b_i^0 作为近似值,并将 b_i 与 b_i^0 之差记为 Δb_i,则有

$$b_i=b_i^0+\Delta b_i \tag{2}$$

将(2)式代入(1)式,这样就将估计参数 b_i 化解成确定修正值的问题。对此,用泰勒级数将(1)式展开并取其一次项,可得

$$y=f(X,B)\approx f(X,B^0)+\frac{\partial f(X,B)}{\partial b_1}\Delta b_1$$
$$\frac{\partial f(X,B)}{\partial b_2}\Delta b_2+\cdots+\frac{\partial f(X,B)}{\partial b_m}\Delta b_m \tag{3}$$

当 b_i^0 给定时,(3)式中各偏导数及 $f(X,B^0)$ 均为观测值和线性拟合参数的函数,可以直接算出。令

$$\frac{\partial f(X,B)}{\partial b_1}=\alpha,\quad \frac{\partial f(X,B)}{\partial b_2}=\beta,\quad \frac{\partial f(X,B)}{\partial b_m}=\omega$$

则有

$$y-f(X,B^0)=\alpha\Delta b_1+\beta\Delta b_2+\cdots+\omega\Delta b_m \tag{4}$$

令 $\Delta y=y-f(X,B^0)$, $L=y-\hat{y}$ ($\hat{y}$ 为线性拟合值),设改正数 $V=(\hat{y}+\Delta y)-y$,则有 $V=\Delta y-L$。

当观测值(样本)的个数为 n 时,就有 n 个这样的改正数方程式,可得

$$V_j=\alpha_j\Delta b_1+\beta_j\Delta b_2+\cdots+\omega_j\Delta b_m-L_j \tag{5}$$

在(5)式中,把各参数的修正值 $\Delta b_1,\Delta b_2,\cdots,\Delta b_m$ 看成未知数,则按最小二乘法的原理,Δb_i 应使改正数 V_j 的平方和最小。为此

令目标函数 $F=\sum_{j=1}^{n}V_j^2=\sum_{j=1}^{n}(\alpha\Delta b_1+\beta\Delta b_2+\cdots+\omega\Delta b_m-L)^2$,欲使 $F=\sum_{j=1}^{n}V_j^2$ 的值最小,则有

$$\frac{\partial F}{\partial b_1}=2\sum_{j=1}^{n}(\alpha\cdot\Delta b_1+\beta\cdot\Delta b_2+\cdots+\omega\cdot\Delta b_m-L_j)\cdot\alpha=0$$
$$\frac{\partial F}{\partial b_2}=2\sum_{j=1}^{n}(\alpha\cdot\Delta b_1+\beta\cdot\Delta b_2+\cdots+\omega\cdot\Delta b_m-L_j)\cdot\beta=0$$
$$\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots$$
$$\frac{\partial F}{\partial b_m}=2\sum_{j=1}^{n}(\alpha\cdot\Delta b_1+\beta\cdot\Delta b_2+\cdots+\omega\cdot\Delta b_m-L_j)\cdot\omega=0$$

将上列各式展开除以 2,并按未知数 Δb_i 集项,就得到矩阵形式的方程组

$$\begin{bmatrix}\sum\alpha\alpha & \sum\alpha\beta & \cdots & \sum\alpha\omega\\ \sum\beta\alpha & \sum\beta\beta & \cdots & \sum\beta\omega\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \sum\omega\alpha & \sum\omega\beta & \cdots & \sum\omega\omega\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\Delta b_1\\ \Delta b_2\\ \vdots\\ \Delta b_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\alpha L\\ \sum\beta L\\ \vdots\\ \sum\omega L\end{bmatrix} \tag{6}$$

解算(6)式即可求得各参数的修正值 Δb_i,再由式(6)得到修正的各参数估值 b,由此组成新的方程。这时由新的方程拟合值算得的残差平方和将明显减小,与此相应的拟合精度指标相关指数 R 及剩余标准差 S 将比参数修正前更理想。

$$\text{相关指数}\quad R=\sqrt{1-\frac{\sum(y-Y)^2}{\sum(y-\bar{y})}}$$

$$\text{剩余标准差}\quad S=\sqrt{\frac{\sum(y-Y)}{n-k-1}}\ (k\ \text{为因子个数})$$

这里应指出,上述推导过程中用泰勒级数展开时舍去了高次项,故有时需重复迭代修正非线性模型参数。当修正值 Δb_i 趋近于零时,参数估值逼近无偏。通常迭代 3~5 次使 Δb_i 的值不影响拟合值的计算精度就认为是无偏了。

高斯—牛顿法的特点是目标函数收敛较快,但对参数初值的选取比较严格,选用常规法求得的非线性模型参数作为初值 b_0 证明是比较合理的。

2　滑坡预测预报模型

目前,国内外提出的滑坡预测预报模型大约有 30 多种[7]。这里主要介绍 Verhulst 模型和灰色 GM(1,1) 模型的建模原理和方法。

2.1　Verhulst 模型

Verhulst 模型是德国生物学家费尔哈斯(Verhulst) 1837 年提出的一种生物生长模型。基于滑坡的变形、发展、成熟和破坏的过程与生物繁殖、生长、成熟、消亡的发展演变过程具有相似性,故可将 Verhulst 模型用于滑坡的变形和时间的预测预报。其基本原理如下

设等间隔监测数据序列为

$$X^{(0)}(t)=\{X^{(0)}(1),X^{(0)}(2),\cdots,X^{(0)}(n)\}$$

对 $X^{(0)}(t)$ 作一次 AGO 变换,得

$$X^{(1)}(t)=\{X^{(1)}(1),X^{(1)}(2),\cdots,X^{(1)}(n)\}$$

以 $X^{(1)}(t)$ 拟合成 Verhulst 一阶白化非线性微分方程

$$\frac{dX^{(1)}(t)}{dt}=aX^{(1)}(t)-b(X^{(1)}(t))^2 \tag{7}$$

式中: a, b——待定系数,可用最小二乘法求取。

$$\hat{a}=[a,b]^T=[B^TB]^{-1}B^TY_N \tag{8}$$

$$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}[X^{(1)}(1)+X^{(1)}(2)] & -\{\frac{1}{2}[X^{(1)}(1)+X^{(1)}(2)]\}^2\\ \frac{1}{2}[X^{(1)}(1)+X^{(1)}(3)] & -\{\frac{1}{2}[X^{(1)}(1)+X^{(1)}(3)]\}^2\\ \frac{1}{2}[X^{(1)}(n-1)+X^{(1)}(n)] & -\{\frac{1}{2}[X^{(1)}(n-1)+X^{(1)}(n)]\}^2\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$Y_N = [X^{(0)}(2), X^{(0)}(3), \cdots, X^{(0)}(n)]^T \quad (10)$$

将求得的待定系数代入式(7)解得非线性微分方程的解为

$$\hat{X}(t) = \frac{a/b}{1+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{X^{(0)}(1)}-1\right)e^{-a(t-t_0)}} \quad (11)$$

对 $X^{(1)}(t)$ 作一次累减生成,即得还原序列。

式(11)即为所建立的滑坡变形 Verhulst 非线性微分动态预报模型,其中,$t_0=0$ 为初始时刻。

2.2 灰色 $GM(1,1)$ 模型

设等间隔监测数据序列为 $X^{(0)}(t)$:

$$X^{(0)}(t) = [X^{(0)}(1), X^{(0)}(2), \cdots, X^{(0)}(n)]$$

对 $X^{(0)}(t)$ 作一次 AGO 变换,得

$$X^{(1)}(t) = [X^{(1)}(1), X^{(1)}(2), \cdots, X^{(1)}(n)]$$

以 $X^{(1)}(t)$ 拟合成一阶白化微分方程:

$$\frac{dX^{(1)}(t)}{dt} + aX^{(1)} = u \quad (12)$$

式中:a, u ——待定系数,可用最小二乘法求取。

$$\hat{a} = [a, u]^T = [B^TB]^{-1}B^TY_N \quad (13)$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}[X^{(1)}(1)+X^{(1)}(2)] & 1 \\ -\frac{1}{2}[X^{(1)}(2)+X^{(2)}(3)] & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}[X^{(1)}(n-1)+X^{(1)}(n)] & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$Y_N = [X^{(0)}(2), X^{(0)}(3), \cdots, X^{(0)}(n)]^T \quad (15)$$

将求得的待定系数代入式(12)解得微分方程的解为:

$$\left.\begin{aligned} &\hat{X}^{(1)}_{(k+1)} = \left(X^{(0)}_{(1)} - \frac{u}{a}\right)e^{-ak} + \frac{u}{a} \\ &\hat{X}^{(1)}_{(1)} = X^{(0)}_{(1)} \qquad (k>1, \text{且为正整数}) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

对微分方程的解作一次累减生成,即得还原序列 $\hat{X}^{(0)}_{(k)}$

$$\hat{X}^{(0)}_{(k)} = \left[X^{(0)}(1) - \frac{u}{a}\right](1-e^{a})e^{-a(k-1)} \quad (17)$$

3 实例应用

著名的洒勒山滑坡发生于 1983 年 3 月 7 日,位于甘肃省东乡县境内巴谢河北岸。1986 年 3 月 25 日下午 1 点 43 分,洒勒山(老)滑坡后缘山体又发生了一次体积约 2.40×10^6 m^3 的新滑坡(称洒勒山新滑坡)。滑坡过程持续 1′17″,滑动距离 250 m。

依据洒勒山新滑坡的位移监测资料[8](表 1),建立了该滑坡的 Verhulst 模型、灰色 GM(1,1)模型,并运用高斯—牛顿法对两模型的参数进行优化。计算结果分别见表 1—2 和图 1—2。

从表 1 可知,Verhulst 模型参数经 3 次迭代优化后,残差平方和由 0.017 1 降低到 0.003 0,相应的剩余标准差由 0.046 2 降低到 0.019 5,相关指数由 0.851 1提高到 0.989 6。由此可见,Verhulst 模型经过参数优化后,模型的预测精度有显著提高。从图 1 也可看出,参数优化后 Verhulst 模型的预测曲线与监测曲线拟合较好。

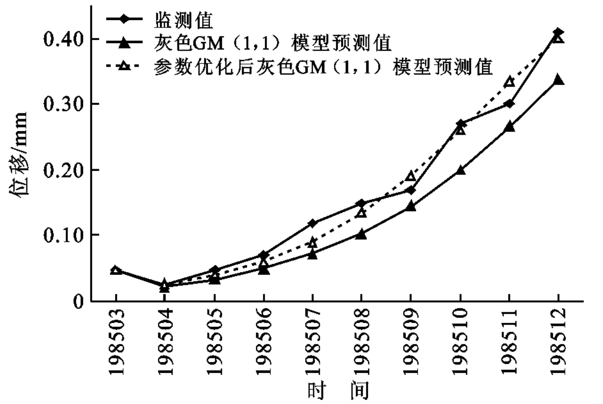

图 1 洒勒山滑坡位移监测值及参数优化前后 **Veuhulst** 模型的预测值随时间变化曲线

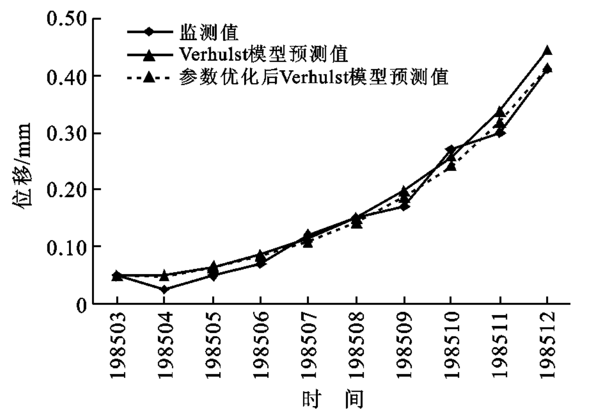

图 2 洒勒山滑坡位移监测值及参数优化前后灰色 **GM(1,1)** 模型的预测值随时间的变化曲线

同样,从表 2 可见,灰色 GM(1,1)模型的参数经 2 次迭代优化后,残差平方和由 0.004 6 降低到 0.002 4,相应的剩余标准差由 0.024 1 降低到 0.017 4,相关指数由 0.961 8 提高到 0.991 7。灰色 GM(1,1)模型经过参数优化后,模型的预测精度也有显著提高。从图 2 也可看出,参数优化后灰色 GM(1,1)模型的预测曲线比参数优化前模型的预测曲线与监测曲线拟合得好。

4 结 论

通过对洒勒山滑坡建立灰色 GM(1,1)模型和 Verhulst 模型,并运用高斯—牛顿法对两个非线性模型的参数进行优化迭代,结果表明优化后各模型的预测精度比优化前各模型的预测精度有显著提高。说明运用高斯—牛顿法优化非线性模型参数是一种提高滑坡预测预报模型精度的有效且切实可行的方法。

表 1　洒勒山新滑坡位移监测资料、**Verhulst** 模型参数优化前后预测值及预测精度指标比较

时 间	位移监测值/ m	Verhulst 模型预测值/ m	参数优化后 Verhulst 模型预测值/ m		
			迭代 1 次	迭代 2 次	迭代 3 次
198503	0.048 0	0.048 0	0.048 0	0.048 0	0.048 0
198504	0.025 0	0.023 1	0.025 4	0.026 1	0.026 3
198505	0.048 0	0.033 9	0.038 5	0.039 8	0.040 3
198506	0.070 0	0.049 6	0.057 9	0.060 3	0.061 2
198507	0.120 0	0.072 0	0.086 2	0.090 2	0.091 6
198508	0.150 0	0.103 1	0.125 9	0.132 2	0.134 3
198509	0.170 0	0.145 2	0.179 5	0.188 4	0.191 0
198510	0.270 0	0.199 6	0.247 0	0.257 9	0.260 2
198511	0.300 0	0.265 5	0.323 7	0.334 2	0.334 6
198512	0.410 0	0.338 0	0.398 4	0.403 6	0.399 6
残差平方和		0.017 1	0.003 3	0.003 1	0.003 0
剩余标准差		0.046 2	0.020 2	0.019 6	0.019 5
相关指数		0.851 1	0.988 8	0.989 6	0.989 6
参数 a		0.397 5	0.430 7	0.440 0	0.443 6
参数 b		0.081 9	0.097 5	0.105 7	0.111 1

表 2　洒勒山新滑坡位移监测资料、灰色 **GM(1, 1)** 模型参数优化前后预测值及预测精度指标比较

时 间	位移监测值/ m	灰色 GM(1,1) 模型预测值/ m	参数优化后灰色 GM(1,1) 模型预测值/ m	
			迭代 1 次	迭代 2 次
198503	0.048 0	0.048 0	0.048 0	0.048 0
198504	0.025 0	0.049 7	0.048 5	0.047 9
198505	0.048 0	0.065 3	0.063 4	0.062 8
198506	0.070 0	0.085 9	0.082 9	0.082 2
198507	0.120 0	0.113 0	0.108 4	0.107 6
198508	0.150 0	0.148 5	0.141 8	0.140 9
198509	0.170 0	0.195 4	0.185 4	0.184 4
198510	0.270 0	0.256 9	0.242 4	0.241 5
198511	0.300 0	0.337 9	0.317 0	0.316 1
198512	0.410 0	0.444 4	0.414 5	0.413 9
残差平方和		0.004 6	0.002 5	0.002 4
剩余标准差		0.024 1	0.017 6	0.017 4
相关指数		0.961 8	0.991 6	0.991 7
参数 a		- 0.273 9	- 0.268 2	- 0.269 5
参数 u		0.030 0	0.029 4	0.028 8

[参 考 文 献]

[1] 王新洲. 非线性模型参数估计理论与应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.

[2] 罗玉峰, 崔远来, 朱秀珍. 高斯—牛顿法及其在作物水分生产函数模型参数求解中的应用[J]. 节水灌溉, 2004(1): 1—2.

[3] 郭科, 胥泽银. 最优化方法及其程序设计[M]. 四川科技出版社, 1998.

[4] 何薪基, 田斌, 周建军. 最优权组合模型与参数优化在安全监测分析中的应用[J]. 大坝观测与土工测试, 2000, 24(5): 24—33.

[5] 田斌, 任德记, 何薪基. 非线性组合优化模型在水工建筑物位移监控中的应用[J]. 水电自动化与大坝监测, 2004, 28(4): 55—58.

[6] 谭少华. 加权回归与参数优化在滑坡变形分析中的应用[J]. 三峡大学学报: 自然科学版, 2001, 23(6): 491—494.

[7] 李秀珍. 滑坡灾害的时间预测预报研究[D]. 成都: 成都理工大学, 2004.

[8] 李天斌, 陈明东, 王兰生, 等. 滑坡实时跟踪预报[M]. 成都: 成都科技大学出版社, 1999.